

INFORMAÇÃO ÚTIL OU ENTROPIA PONDERADA: REVISÃO E DESENVOLVIMENTOS

Useful information or weighted entropy: review and developments

José Pinto Casquilho *

À memória de meus pais, Mário e Lucília

Resumo

Neste artigo revê-se o conceito de entropia ponderada - também designada por informação útil -, propondo-se uma interpretação semiótica do tema em termos da relevância ou valor informativo de eventos num espaço amostral e contexto de utilidade. Ainda se discutem outros desenvolvimentos relacionados, nomeadamente: contribuição e valor contributivo médio. Apresenta-se também uma vasta revisão bibliográfica sobre o assunto e exemplificações numéricas.

Palavras-chave: Probabilidade; valor de informação; utilidade; valor informativo médio; quadrado semiótico; relevância contextual; valor contributivo médio

Rezumu/abstratu

Iha artigu ida ne'e haree fila fali konabá konseitu husi entropia hodi hanoin didi'ak – hakatak mós informasaun importante -, hafó interpretasaun semiótika ida husi tema, iha termuz ne'ebé maka iha ninia relevánsia ka valor informativu husi eventua sira iha espasu ida amostrál nó iha kontektu utilidade. Sei dizkuti mos dezenvolvimentu sira seluk ne'ebé iha ligasaun, liuliu: kontribuisaun nó valor kontributivu mediu. Apresenta mós revizaun bibliográfica kle'an ida konabá asuntu ne'e nó explikasaun numérika sira.

Liafuan-Xavé: Probabilidade; valór informasaun; utilidade; valór informativu médiu; kuadradu semióticu; relevánsia kontektuál; valór kontributivu médiu

* Professor Doutor no Programa de Pós-Graduação e Pesquisa da Universidade Nacional Timor Lorosa'e; investigador integrado no centro de Comunicação, Informação e Cultura CIC.Digital da Fundação para a Ciência e Tecnologia de Portugal; colaborador no Centro de Ecologia Aplicada "Prof. Baeta Neves" da Universidade de Lisboa.

Abstract

This paper reviews the concept of weighted entropy - also called useful information - proposing a semiotic interpretation of the theme in terms of the relevance or informative value of events in a sample space and a context of usefulness. Still, we discuss other related developments, namely: contribution and mean contributive value. It is also presented an extensive literature review on the subject and numerical examples.

Keywords: Probability; information value; usefulness; mean informative value; semiotic square; contextual relevance; mean contributive value

INFORMAÇÃO ÚTIL OU ENTROPIA PONDERADA: REVISÃO E DESENVOLVIMENTOS

Useful information or weighted entropy: review and developments

Introdução

O conceito de informação tem várias interpretações, frequentemente ancoradas num espaço de acontecimentos¹, que se podem reportar a qualquer manifestação sensível: tanto se pode considerar um evento a medição de uma árvore, o nascimento de uma criança, a cotação em bolsa de um activo financeiro num certo dia, o resultado de uma avaliação escolar, escrever um texto, etc. Conforme Deleuze (2006) nos reporta, um modelo de inteligibilidade do mundo centrado na análise dos acontecimentos remonta aos Estóicos gregos, na Antiguidade Clássica.

No âmbito deste escrito, só vamos considerar o conceito de informação designado como entropia estatística, ou entropia de Shannon - relacionando informação com incerteza, ou ainda informação plural e diversidade, como se referiu em Casquilho (2013). Outras interpretações do conceito de informação podem ser revistas por exemplo em Ebrahimi *et al.* (2010), em particular a definição de informação reportada a Kullback e Leibler (1951), relacionável com a de Shannon; ainda outras, como informação no sentido de Kolmogorov, não são aqui consideradas.

Também só nos vamos situar no caso mais simples de acontecimentos que estão relacionados por uma única propriedade que os liga num determinado tipo - um atributo comum -, a que se pode associar uma classificação, de que resulta uma partição em classes do conjunto dos elementos observáveis. Significa isto que, seleccionando ao acaso (ou seja: aleatoriamente) um elemento de uma população indexada a esse atributo, observando-o e registando o resultado - esse é o acontecimento aleatório em causa -, o referido elemento reporta-se apenas a uma dada classe e estas consideram-se em número finito², e portanto o resultado dessa experiência aleatória insere-se no conjunto que caracteriza as classes ou acontecimentos elementares, seja $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Este conjunto A designa-se frequentemente como espaço amostral e o espaço de acontecimentos que lhe está associado é o conjunto de todos os subconjuntos de A , o conjunto potência de A - que se costuma representar por $\Omega = \wp(A)$ -, que inclui o conjunto vazio

¹ Utilizamos ‘acontecimento’ e ‘evento’ como sinónimos.

² Por exemplo, uma pessoa tem olhos negros, ou castanhos, ou verdes, ou azuis - nesta simplificação, existem 4 classes associadas ao acontecimento relativo à observação da cor dos olhos de alguém.

\emptyset que representa o acontecimento impossível, e o próprio conjunto A . Neste quadro, o conjunto Ω designa-se *acontecimento certo*, porque é seguro que em qualquer realização dessa experiência aleatória, enunciada em termos simples ou compostos, o respectivo resultado estará representado em Ω .

Os objectivos deste artigo são: rever a história do conceito de entropia ponderada, também designada informação útil e ainda valor informativo médio, e propôr outra interpretação, esquematizada semioticamente, ora designada por relevância contextual média; apresentar desenvolvimentos baseados na extensão desse conceito, nomeadamente os de contribuição e de valor contributivo médio; e ainda facultar uma extensa bibliografia para quem, por razões de apetência ou necessidade, possa querer vir a interessar-se em maior profundidade pelo assunto, seja nos desenvolvimentos teóricos ou nas aplicações, mormente em Economia e Ecologia.

1. Entropia ponderada ou informação útil

No âmbito da teoria matemática da comunicação considera-se que o *valor de informação* de um acontecimento está relacionado inversamente com a sua probabilidade de ocorrência - aqui designada pela letra p - através da fórmula $I = -k \log p = k \log(1/p)$, a constante $k > 0$ reportando-se às unidades de medida. Assim sendo, o acontecimento certo, que, por definição, ocorre com probabilidade $p = 1$, tem valor de informação nulo, porque não acrescenta nada ao que já se sabia; pelo contrário, um acontecimento muito raro - por exemplo, algo que classificaríamos como um “milagre” - revela ter um valor de informação elevadíssimo, o que se esclarece com o seguinte cálculo matemático: $\lim_{p \rightarrow 0^+} -k \log p = +\infty$.

Raridade, ou escassez, é pois uma palavra-chave para situar valor de informação. Na continuidade do trabalho de Hartley (1928) no sentido de desenvolver uma medida quantitativa para comparar as capacidades de vários sistemas transmitirem informação, Shannon (1948) estabeleceu a bem conhecida fórmula, também designada por entropia estatística $H = -k \sum_{j=1}^n p_j \log_2 p_j$, que mede a quantidade média de informação, expressa em *bits*³, associada a um conjunto de n acontecimentos elementares que definem um espaço amostral, ou seja tais que as respectivas probabilidades verificam as condições de padronização e completude: $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ com $p_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^n p_j = 1$; a constante $k > 0$ reporta-se às unidades de medida (por exemplo, permitindo converter logaritmos calculados numa dada base em qualquer outra). A estrutura

³ Abreviatura de *binary digits*.

matemática (A, Ω, P) constitui um espaço de medida normalizada. Mostra-se que a informação média máxima – o mesmo é dizer: o máximo valor da entropia estatística - verifica-se quanto os acontecimentos são equiprováveis⁴, caso que em Estatística é frequentemente designado como sendo a *distribuição uniforme*. É assim que, em Ecologia, a fórmula de Shannon, normalmente simplificada fazendo $k = 1$ e utilizando logaritmos naturais⁵, portanto denotada $H = -\sum_{j=1}^n p_j \log p_j$, é utilizada para quantificar a diversidade de uma comunidade ecológica, tomando o valor máximo $H^* = \log n$ quando todas as espécies num ecossistema ocorrem com abundâncias, ou frequências relativas, iguais.

Mas, se raridade é uma das palavras-chave para referenciar o valor de informação de um evento, tal não nos diz nada sobre os efeitos desse acontecimento, em particular sobre a sua utilidade, tendo em vista um objectivo, logo contextualizado. Se raridade é um conceito de ordem objectiva – é raro aquilo que ocorre com baixa frequência relativa – já utilidade é muitas vezes um conceito subjectivo, cultural, que no seu sentido mais lato poderá ser histórico-geográfico. Por exemplo, o petróleo só é útil desde a Revolução Industrial para cá, e numa fase tardia, quando se arranhou tecnologia que viabilizava a extração e consequente refinação, permitindo converter a combustão em trabalho mecânico útil; antes disso, ter petróleo nos campos, tornando-os improdutivos para a agricultura e poluindo as águas, era uma “maldição”, correspondia a uma inutilidade, prejudicial num outro contexto.

Assim, Bellis e Guiasu (1968) introduziram uma generalização da fórmula de Shannon, designada por medida de informação quantitativa-qualitativa no âmbito da cibernética, contemplando, para além do valor de informação de um acontecimento atrás referido, o valor da sua utilidade em função de um dado objectivo, este expresso por um conjunto de números positivos, cada um relacionado com o respectivo evento, seja $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $u_j > 0 \text{ e } j = 1, \dots, n$. Considerando que o valor de utilidade de um acontecimento não depende da probabilidade da sua ocorrência, os autores estruturaram axiomáticamente o conceito e denotaram a informação associada a cada evento, agora completada pela sua utilidade, como $I(u_j, p_j) = -k u_j \log p_j$, com $k > 0$, sendo então a medida da informação prestada pelo evento de índice j proporcional à respectiva utilidade, de que decorre que o valor médio⁶ num espaço amostral é calculado como $H_U = -\sum_{j=1}^n u_j p_j \log p_j$, e é mais comumente designado por *entropia ponderada*. Guiasu (1971) mostrou que, tal como ocorre com o valor médio de

⁴ Quer dizer que ocorrem com igual probabilidade.

⁵ Neste caso considera-se que as unidades associadas são designadas por *nats* (ou *nits*).

⁶ Utilizamos a formulação simples, fazendo $k = 1$ e usando logaritmos naturais

informação H , a entropia ponderada H_U tem uma única solução que torna o respectivo valor máximo, no entanto, agora, o maximizante aparece definido implicitamente obrigando à resolução numérica de uma equação. No mesmo ano, Guiasu e Picard (1971) introduziram o sinónimo *informação útil* para designar a entropia ponderada.

De então para cá têm sido muitas as aplicações deste conceito de informação útil ou entropia ponderada. Por exemplo, Bouchon (1976) associou o conceito de informação útil à teoria de questionários; Sharma *et al.* (1978) desenvolveram uma axiomatização diferente para o conceito de informação útil e uma generalização designada informação útil de grau α . Aggarwal and Picard (1978) estabeleceram um conjunto de medidas de informação com preferência, esta definida como o produto da utilidade e da probabilidade de um evento. Várias aplicações com a entropia ponderada foram desenvolvidas nos anos oitenta: Batty (1986) utilizou o conceito para discutir o padrão de agregação espacial em cidades, enquanto Nawrocki e Harding (1986) usaram a entropia ponderada pelos valores dos diferentes activos financeiros como uma medida de risco no investimento; Taneja e Tuteja (1986) utilizaram o conceito para promover uma caracterização quantitativa e qualitativa de uma medida de imprecisão. Mais tarde, Parkash e Singh (1994) propuseram uma unificação da informação ponderada, enquanto Hooda e Bhaker (1997) generalizaram uma medida de informação útil para sistemas codificados. O tema continua a merecer atenção e desenvolvimentos recentes: por exemplo, Sreevally e Varma (2004) introduziram medidas de entropia ponderada cruzada; Srivastava (2011) apresenta resultados relativos a limites inferiores e superiores no contexto de medidas de entropia ponderada; Kumar *et al.* (2012, 2013) discutem uma generalização que designam como uma medida satisfatória da informação útil e utilizam-na para aferir tamanhos óptimos de códigos.

De maneira independente, no âmbito de uma generalização da entropia de Shannon numa família funcional com 1 parâmetro, de que resultam casos particulares designados como extensões, Casquilho *et al.* (1997) deduziram fórmulas equivalentes, embora diferentes, para obtenção das soluções óptimas da entropia ponderada - aí designada *valor informativo médio* - e, na sequência, propuseram-se outros desenvolvimentos, sucessivamente aplicados na discussão das variedades de equilíbrios de composição do mosaico de paisagem ou ecomosaico florestal (CASQUILHO, 1999, 2010, 2012). Também Guiasu e Guiasu (2003, 2011, 2012) revisitaram o tema da entropia ponderada em Ecologia, observando que quando se mede a diversidade em ecossistemas, tem que se tomar em conta informação adicional, como seja a abundância das espécies, a sua significância económica ou importância ecológica, reflectida nas utilidades, conceito que foi depois estendido para o de entropia ponderada conjunta, relativa à distribuição de probabilidades de pares de espécies associadas.

2. Valor informativo ou relevância contextual

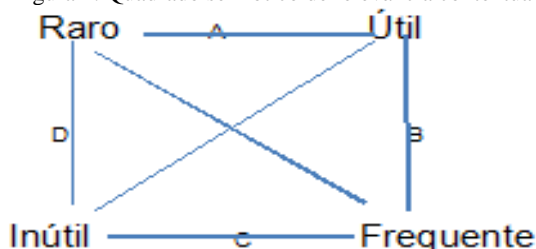
No seguimento da introdução do conceito e da fórmula da entropia ponderada, vários autores utilizaram o termo *preferência* para se reportarem a uma medida conjunta da utilidade e da probabilidade de um acontecimento (e.g. AGGARWAL e PICARD, 1978), sendo a preferência do acontecimento j expressa como o produto $q_j = u_j p_j$, tendo-se pois que a preferência cresce quer com a utilidade quer com a probabilidade do evento, mas não com o seu valor de informação, pois que, pelo contrário, apresenta uma relação inversa com este.

Propõe-se aqui uma nova abordagem, introduzindo a valorização da relevância de um acontecimento num contexto que indexa a sua utilidade, o mesmo é dizer o seu valor informativo. Existe uma Teoria da Relevância que advoga o raciocínio estratégico em termos da maximização da informação enquanto se procura minimizar o esforço de processamento cognitivo (PIETARINEN, 2007) e, neste âmbito, a relevância é definida como a contrapartida entre o esforço necessário para processar alguma entrada e o ganho informacional que decorre dessa inferência (CANN *et al.*, 2009). Estas teorias surgem associadas a uma outra teoria da informação, designada Teoria da Situação, onde se afirma que está sempre disponível muita (demasiada) informação e esta só é representável parcialmente (e.g. PARICK e CLARK, 2007).

O desenvolvimento que apresentamos seguidamente relaciona-se com estes conceitos: trata-se de uma redução do conceito de relevância de um acontecimento a um contexto marcado pelo seu valor de informação, derivado da correspondente probabilidade, e utilidade presumida em função de um objectivo que articulamos num esquema semiótico, suscitando uma incursão semântica. O quadrado semiótico que se apresenta⁷ visa articular as modalidades substantivas, *probabilidade* que também se poderia traduzir como abundância relativa (diagonal: raro-frequente) e *utilidade* (diagonal: útil-inútil) de que derivam 4 campos semânticos principais, correspondentes aos lados do quadrado, aqui designados pelas letras A, B, C e D, que caracterizam a conjunção lógica dos atributos que estão nos vértices, denotada pelo símbolo &.

⁷ Uma introdução à metodologia do quadrado semiótico pode ser revista em Casquilho (2013).

Figura 1: Quadrado semiótico de relevância contextual



Assim, teremos, relativamente aos diferentes lados do quadrado, as seguintes hipóteses hermenêuticas:

- ❖ A: raro&útil - é o domínio mais relevante no contexto, o domínio do ‘valioso’, do maior valor informativo; pode começar por ser apenas promissor, mas, derivado da procura gerada pela sua utilidade e escassez, decorre uma tensão que induz valor elevado. Por exemplo, a água, quando escassa, como nas regiões desérticas, sempre foi muito valorizada por razões imediatas ligadas à sobrevivência, de que uma expressão tangível são os “oásis” como “ilhas” de valor. Já os diamantes, sendo raros, têm sobretudo utilidade no sentido cultural: reflectem a luz fortemente, tornando-se “pedras de luz”, e portanto, na lógica do adorno e da simbologia do poder⁸, ganharam uma valorização que se pode dizer que tem sido durável ao longo de séculos, ou mesmo de milénios; já se, de repente, se encontrassem grandes jazidas de diamantes, tornando-se um bem abundante, este perderia imediatamente grande parte do valor, tendendo a converter-se noutra categoria, eventualmente de valor informativo baixo, como o quartzo hialino.
- ❖ B: útil&frequente - é o domínio do ‘regular’, do usual, porventura indispensável, mas que, por razões de abundância elevada, tem relevância contextual ou valor informativo intermédios ou mesmo baixos, embora seja conforme ao objectivo. Por exemplo, o oxigénio do ar que respiramos é indispensável à vida, mas, felizmente, é de tal maneira abundante que nem nos lembramos disso. Outro exemplo, com raízes históricas, é o sal, que usamos para temperar os alimentos e ainda, nalguns casos, para conservá-los; hoje, está acessível para quase toda a gente a um preço baixo ou mesmo irrisório – é normal existir sal em qualquer cozinha – mas, noutros tempos, tinha um tal valor para as populações afastadas do litoral, que se tornou a raiz da palavra “salário”: por exemplo, há notícia de que os soldados do Império

⁸ Expressa nas modalidades poder-ter e poder-mostrar-ter.

Romano eram pagos com bolsas de sal⁹, que podiam transportar e transacionar facilmente em locais onde era escasso, logo valioso.

- ❖ C: inútil&frequente - é um domínio semântico a tender para uma conotação negativa no contexto, que pode variar do ‘irrelevante’, até ao prejudicial, pernicioso, como poderíamos esclarecer com exemplos que, em sentido próprio ou figurado, seriam conotados como “lixo”. Trata-se do domínio de menor valor informativo no contexto de utilidade a que se refere, e portanto tem uma relevância contextual tendencialmente nula.
- ❖ D: inútil&raro - pode considerar-se o domínio do ‘singular’, insignificante no contexto de utilidade a que se reporta, despreciando, em oposição ao domínio do usual que constitui o lado oposto do quadrado (B). Embora sendo raro, e portanto tendo elevado valor de informação, como é inútil não tem procura, e assim não se estabelece a tensão indutora do valor informativo de que decorre baixa relevância contextual.

Em conclusão, podemos inferir que neste contexto de enunciação - que se pode ter como aparentado ao esquema das modalidades aléticas que distinguem o necessário do contingente e o possível do impossível (e.g. LOZANO, 1994) - dos eixos iniciais expressos nas diagonais, probabilidade e utilidade, decorrem dois outros resultantes das posições conjugadas: o eixo vertical central do *valor* (A: relevante - C: irrelevante), e o eixo horizontal central da *conformidade* (D: singular - B: regular). A máxima relevância contextual ou o maior valor informativo ocorre na posição A e o valor mínimo na posição C, enquanto B e D ocupam posições intermédias.

Se o quadrado semiótico atrás apresentado permite uma incursão semântica no tema da relevância contextual, relativa às modalidades substantivas que se reportam à abundância relativa, ou probabilidade, e à utilidade, conjugadas no valor informativo de um evento, importa agora excursar sobre como essa aplicação pode alcançar expressão numérica, permitindo discernir uma gradação.

Incorrendo na modelação matemática, podemos definir o valor de relevância contextual, ou valor informativo, do acontecimento a_j , como sendo o produto $r_j = -u_j \log p_j$ portanto o produto do valor de utilidade u_j e do valor de informação do evento correspondente. Os acontecimentos mais relevantes serão aqueles que são úteis e raros, como atrás foi discutido e, pelo contrário um acontecimento torna-se totalmente irrelevante se inútil e frequente, ocupando posições intermédias nos outros casos. Na Tabela 1 exemplificam-se o cálculo desses valores numéricos de acordo com as probabilidades e os valores de utilidade aí expressos.

⁹ Em latim, *in pretio salis*: pagamento em sal.

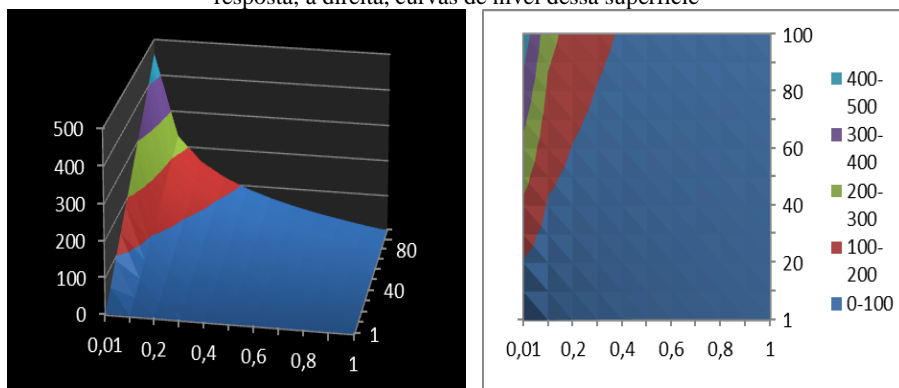
Tabela 1: Exemplificação do cálculo de valores informativos ou de relevância

	Probabilidade p_j										
u_i	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	4.605	2.303	1.609	1.204	0.916	0.693	0.511	0.357	0.223	0.105	0
10	46.052	23.026	16.094	12.040	9.163	6.931	5.108	3.567	2.231	1.054	0
20	92.103	46.052	32.189	24.079	18.326	13.863	10.216	7.133	4.463	2.107	0
30	138.155	69.078	48.283	36.119	27.489	20.794	15.325	10.700	6.694	3.161	0
40	184.207	92.103	64.378	48.159	36.652	27.726	20.433	14.267	8.926	4.214	0
50	230.259	115.129	80.472	60.199	45.815	34.657	25.541	17.834	11.157	5.268	0
60	276.310	138.155	96.566	72.238	54.977	41.589	30.649	21.400	13.389	6.322	0
70	322.362	161.181	112.661	84.278	64.140	48.520	35.758	24.967	15.620	7.375	0
80	368.414	184.207	128.755	96.318	73.303	55.452	40.866	28.534	17.851	8.429	0
90	414.465	207.233	144.849	108.358	82.466	62.383	45.974	32.101	20.083	9.482	0
100	460.517	230.259	160.944	120.397	91.629	69.315	51.083	35.667	22.314	10.536	0

Na figura seguinte está representada graficamente a Tabela 1, quer como superfície de resposta, onde a coordenada vertical expressa os valores informativos ou de relevância contextual, - enquanto no plano da base se tem os valores de probabilidade e de utilidade exemplificados -, quer como curvas de nível. Naturalmente, qualquer que seja o valor de utilidade u_j , se o acontecimento é certo, o correspondente valor informativo anula-se (última coluna da tabela) porque o valor de informação vale zero¹⁰, o que significa que, repetindo o que atrás foi dito, a realização de algo certo não acrescenta nada ao que já se sabia, não introduz informação, não é relevante no contexto. Como se poderá ver ainda na tabela, ou na figura, a região de maiores valores informativos, ou de relevância contextual, corresponde à localização do domínio raro&útil (A), atrás discutida no quadrado semiótico.

¹⁰ Recorde-se que $\log 1 = 0$, qualquer que seja a base utilizada.

Figura 2 – Gráficos do exemplo numérico expresso na Tabela 1: à esquerda, a superfície de resposta; à direita, curvas de nível dessa superfície



Definindo-se o valor informativo ou a relevância contextual de um evento como fizemos atrás, o valor médio associado a um espaço amostral \mathcal{A} calcula-se como $\sum_{j=1}^n r_j p_j = -\sum_{j=1}^n u_j p_j \log p_j$, que é o que atrás designámos como entropia ponderada ou informação útil H_U , e que ainda noutros escritos foi definido como valor informativo médio.

3. Contribuição e valor contributivo médio

Se a relevância contextual do acontecimento certo é nula, pelo que atrás se explanou, já a sua contribuição no contexto de utilidade a que se reporta não o será, pois que contribui com o respectivo valor de utilidade em pleno. A noção de valor contributivo tem a sua origem na reflexão filosófica de Kant e reporta-se a uma forma relacional de valor: é o valor que uma parte confere ao todo em que participa, porque a sua contribuição está condicionada pela presença e extensão das outras componentes desse todo (e.g. STRATTON-LAKE, 2004). Assim, podemos definir o valor contributivo de um acontecimento a_j como sendo a quantidade expressa por $c_j = u_j + r_j = u_j(1 - \log p_j)$ de que decorre que o correspondente valor médio, relativo a um espaço amostral \mathcal{A} , se calcula como:

$$K_U = \sum_{j=1}^n (u_j + r_j) p_j = \sum_{j=1}^n u_j (1 - \log p_j) p_j$$

Noutros artigos K_U foi designado como *valor contributivo médio* (e.g. CASQUILHO, 2010; 2012), e utilizado na caracterização das variedades de equilíbrios de composição do mosaico de paisagem. No entanto, esta metodologia pode-se aplicar a qualquer sistema canónico definido por um

conjunto de estados coexistentes a que se associam valores de utilidade e probabilidades, ou proporções de ocorrência. Da mesma forma que na entropia ponderada H_U , demonstra-se que, dado um conjunto de valores de utilidade pré-fixado $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $u_j > 0$ e $j = 1, \dots, n$, existe uma, e uma só, solução de composição que maximiza o valor do índice K_U , assim designada como a solução óptima (CASQUILHO, 2014).

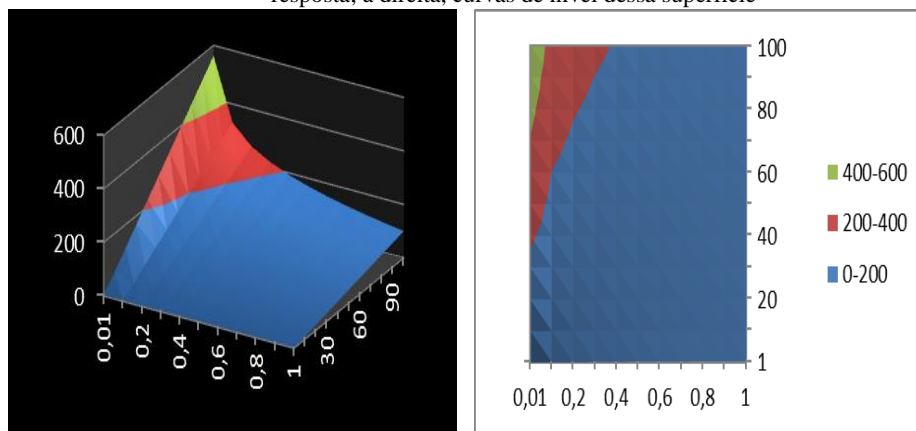
Reportando-nos à Tabela 1, a Tabela 2 expressa agora os valores contributivos de acordo com a fórmula $c_j = u_j(1 - \log p_j)$: na prática trata-se apenas de somar, em cada linha, aos valores que constavam na Tabela 1, o correspondente valor de utilidade, sendo que esse resultado é particularmente visível na última coluna pois quando o acontecimento é certo o seu valor contributivo é o valor de utilidade.

Tabela 2: Exemplificação de cálculo de valores contributivos

u_i	Probabilidade p_j										
	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	5.605	3.303	2.609	2.204	1.916	1.693	1.511	1.357	1.223	1.105	1
10	56.052	33.026	26.094	22.040	19.163	16.931	15.108	13.567	12.231	11.054	10
20	112.103	66.052	52.189	44.079	38.326	33.863	30.216	27.133	24.463	22.107	20
30	168.155	99.078	78.283	66.119	57.489	50.794	45.325	40.700	36.694	33.161	30
40	224.207	132.103	104.378	88.159	76.652	67.726	60.433	54.267	48.926	44.214	40
50	280.259	165.129	130.472	110.199	95.815	84.657	75.541	67.834	61.157	55.268	50
60	336.310	198.155	156.566	132.238	114.977	101.589	90.649	81.400	73.389	66.322	60
70	392.362	231.181	182.661	154.278	134.140	118.520	105.758	94.967	85.620	77.375	70
80	448.414	264.207	208.755	176.318	153.303	135.452	120.866	108.534	97.851	88.429	80
90	504.465	297.233	234.849	198.358	172.466	152.383	135.974	122.101	110.083	99.482	90
100	560.517	330.259	260.944	220.397	191.629	169.315	151.083	135.667	122.314	110.536	100

Tal como fizemos antes, na Figura 3 está representada graficamente a Tabela 2, quer como superfície de resposta, onde a coordenada vertical expressa os valores contributivos, quer como curvas de nível; no plano da base tem-se os valores de probabilidade e de utilidade exemplificados.

Figura 3 – Gráficos do exemplo numérico expresso na Tabela 2: à esquerda, a superfície de resposta; à direita, curvas de nível dessa superfície



A figura é muito semelhante à Figura 1 atrás representada, mas não igual. Ainda, tal como no valor informativo, o valor contributivo cresce com o valor de informação e portanto alcança maior expressão quando a probabilidade do acontecimento é baixa, ou, em termos de existência, correspondendo a um bem relativamente escasso.

Importará talvez aqui referir que probabilidade e proporção são conceitos intimamente relacionados através da designada interpretação frequencista, que tem suporte nas leis dos grandes números; Anscombe e Aumann (1963) esclarecem que as probabilidades no sentido físico do termo podem ser determinadas empiricamente pela proporção de sucessos em experiências aleatórias. Realmente, em qualquer dos casos, trata-se de designações para uma medida de extensão relativa, denotando a mesma estrutura matemática – um simplex – embora por via de conotações diferenciadas, que não obstante podem-se fazer convergir.

4. Conclusão

Neste texto, que ora finaliza, procurou dar-se conta dos objectivos expressos na introdução. Foi revisto o conceito e a formulação da entropia ponderada, também referida como informação útil, ou valor informativo médio, de que se propôs uma nova interpretação semiótica enquanto relevância contextual média, indexada a um espaço amostral de dimensão arbitrária com utilidades pré-definidas. Também se retomou o conceito e a formulação de outro índice designado valor contributivo médio, que ainda poderá ser reinterpretado no âmbito da Teoria da Utilidade em Economia. A entropia ponderada, ou formulações próximas, continua(m) a ter aplicações atuais, mormente para

definir critérios de alocação de activos financeiros conjugando rentabilidade e doseamento do risco do investimento (e.g. BHATTACHARYYA *et al.*, 2013; ORMOS e ZIBRICZKY, 2013).

Estes conceitos, e as formulações matemáticas correspondentes, ainda prometem ser um campo de aplicação pertinente relativamente à planificação estratégica do território, relacionando objectivos de conservação de biodiversidade com a sua expressão em áreas de habitats compatíveis, por exemplo. Em relação a este tema, de que releva a discussão dos valores que incorrem na interface entre ecologia e economia (e.g. CASQUILHO, 1994) existe evidência substancial de que o uso da terra é resultado, e causa, da interacção entre as sociedades humanas e o ambiente (e.g. VALBUENA *et al.*, 2010; VERBURG *et al.*, 2010), governado principalmente por valores económicos que se expressam no curto prazo, pois que valores monetários estão necessariamente atribuídos, pelo menos implicitamente, em decisões que afectam o uso do solo (e.g. VĚRBIC e SLABE-ERKE, 2009; DE GROOT *et al.*, 2012), ainda sendo referido que o uso do solo é o factor mais importante na estruturação da paisagem (DÍAZ-VARELA *et al.*, 2009), e que as decisões neste âmbito seguem normalmente critérios de maximização da utilidade associados à conversão da paisagem (SATAKE *et al.*, 2007).

Referências bibliográficas

- AGGARWAL, N.L.; PICARD, C.-F., 1978. **Functional equations and information measures with preference.** *Kybernetika*, **14** (3), pp. 174-181.
- ANSCOMBE, F.J.; AUMANN, R.J., 1963. **A definition of subjective probability.** *The Annals of Mathematical Statistics*, **34**, (1), pp.199-205.
- BATTY, M., 1986. **Cost, accessibility and weighted entropy.** *Geographical Analysis*, **15**(3), pp. 256-267.
- BELLIS, M; GUIASU, S., 1968. **A quantitative-qualitative measure of information in cybernetic systems.** In *IEEE Trans. Inform. Theory*, **14**, pp. 593-594.
- BHATTACHARYYA, R; CHATTERJEE, A.; KAR, S., 2013. **Uncertainty theory-based multiple objective mean-entropy-skewness stock portfolio selection model with transaction costs.** In *Uncertainty Analysis and Applications*, **1**, 16.
- BOUCHON, B., 1976. **Useful information and questionnaires.** *Information and Control* **32**, pp. 368-378.
- CANN, R.; KEMPSON, R.; GREGOROMICHELAKI, E., 2009. **Semantics – An introduction to meaning in language.** New York: Cambridge University Press.
- CASQUILHO, J. 1994. **Valores na interface ecologia/economia.** *Ciência, Tecnologia e Sociedade* **21**, pp. 15-22.

- CASQUILHO, J.; NEVES, M.; REGO, F., 1997. **Extensões da função de Shannon e equilíbrio de proporções - uma aplicação ao mosaico de paisagem.** *Anais do Instituto Superior de Agronomia*, **46**, pp. 77-99.
- CASQUILHO, J.A.P., 1999. **Ecomosaico: Índices para o diagnóstico de proporções de composição.** Tese de Doutoramento. Instituto Superior de Agronomia, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- CASQUILHO, J.P., 2010. **Landscape mosaic composition and mean contributive value index.** *Silva Lusitana*, **18**(2), pp. 197-203.
- CASQUILHO, J.A.P., 2012. **Ecomosaico florestal: composição, índices de informação e abdução.** *Revista Árvore*, **36**(2), pp.321-329.
- CASQUILHO, J.P., 2013. **Veridicção, verosimilhança e informação.** *Revista Veritas*, **1**, pp. 81-102.
- CASQUILHO, J.P., 2014. **Discussing an expected utility and weighted entropy framework.** *Natural Science*, **6** (7) (Special issue: Research on Entropy, aceite para publicação).
- DE GROOT, R.; BRANDER, L.; VAN DER PLOEG, S.; COSTANZA, R.; BERNARD, F.; BRAAT, L., *et al.*, 2012. **Global estimates of the value of ecosystems and their services in monetary units.** *Ecosystem Services* **1**, pp. 50-61.
- DELEUZE, G., 2006. **Lógica do sentido.** São Paulo: Editora Perspectiva.
- DÍAZ-VARELA, E.; ÁLVAREZ-LOPEZ, C.J.; MAREY-PÉREZ, M.F., 2009. **Multiscale delineation of landscape planning units based on spatial variation on land-use patterns in Galicia, NW Spain.** *Landscape Ecol. Eng.* **5**, pp.1-10.
- EBRAHIMI, N.; SOOFI, E. H.; REFIK, S., 2010. **Information measures in perspective.** *International Statistical Review*, **78** (3), pp.383-412.
- GUIASU, S., 1971. **Weighted entropy.** *Reports on Mathematical Physics*, **2**(3), pp.165-179.
- GUIASU, S.; PICARD, C. F., 1971. **Borne inférieure de la longueur utile de certains codes.** *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **273**, pp.248-251.
- GUIASU, R.C.; GUIASU, S., 2003. **Conditional and weighted measures of ecological diversity.** *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **11**, pp.283-300.
- GUIASU, R.C.; GUIASU, S., 2011. **The weighted quadratic index of biodiversity for pairs of species: A generalization of Rao's index.** *Natural Science*, **3** (9), pp.795-801.
- GUIASU, R.C.; GUIASU, S., 2012. **The weighted Gini-Simpson index: Revitalizing an old index of biodiversity.** *International Journal of Ecology*, **2012**, Article ID: 478728, 10p.
- HARTLEY, R.V.L., 1928. **Transmission of information.** *Proceedings. of International Congress of Telegraphy and Telephony*, Lake Como, Italy, September 1927, pp.535- 563.

- HOODA, D.S; BHAKER, U.S., 1997. **A generalized ‘useful’ information measure and coding theorems.** *Soochow Journal of Mathematics*, **23**(1), pp.53-62.
- KULLBACK, S.; LEIBLER, R.A., 1951. **On information and sufficiency.** *The Annals of Mathematical Statistics*, **22** (1), pp.79-86.
- KUMAR, S.; KUMAR, A., 2012. **More remarks on generalized useful information measure.** *International Journal of Innovations in Engineering and Technology*, **1**(1), pp.60-64.
- KUMAR, S.; KUMAR, A.; KUMAR, S., 2013. **Some more remarks on generalized useful information measure.** *International Journal of Theoretical & Applied Sciences*, **5**(1), pp.88-90.
- LOZANO, J., 1994. **El discurso histórico.** Madrid: Alianza Universidad.
- NAWROCKI, D.N.; HARDING, W.H., 1986. **State-value weighted entropy as a measure of investment risk.** *Applied Economics*, **18**, pp.411-419.
- ORMOS, M.; ZIBRICZKY, D., 2013. **Asset pricing and entropy.** In: *European Financial Systems 2013* Deev, O., Kajurová, V. and Krajíček, J., Eds. Proceedings of the 10th International Scientific Conference, Brno: Masaryk University, pp.241- 248.
- PARICK, P., CLARK, R., 2007. **An introduction to equilibrium semantics for natural language.** In *Game Theory and Linguistic Meaning* (A-H Pietarinen ed.). Oxford : Elsevier Ltd., pp. 149-158.
- PARKASH, O.; SINGH, Y.B., 1994. **On unified weighted information.** *Soochow Journal of Mathematics* **20** (2), pp.177-185.
- PIETARINEN, A.-V., 2007. **An invitation to languages and games.** In: *Game Theory and Linguistic Meaning* (A.-V PIETARINEN, ed.), Oxford: Elsevier Ltd, pp.1-16.
- SATAKE, A.; JANSSEN, M.A.; LEVIN, S.A.; IWASA, Y., 2007. **Synchronized deforestation induced by social learning under uncertainty of forest-use value.** *Ecological Economics* **63**, pp.452-462.
- SHANNON, C.E., 1948. **A mathematical theory of communication.** *Bell System Technical Journal*, **27**, pp. 379-423, 623-656.
- SHARMA, B. D.; MITTER, J.; MOHAN, M., 1978. **On measures of “useful” information.** *Information and Control* **39**, pp.323-336.
- SREEVALLY, A.; VARMA, S.K., 2004. **Generating measure of cross entropy by using measure of weighted entropy.** *Soochow Journal of Mathematics* **30** (2), pp.237-243.
- SRIVASTAVA, A., 2011. **Some new bounds of weighted entropy measures.** *Cybernetics and Information Technologies*, **11**(3), pp.60-65.
- STRATTON-LAKE, P., 2004. **Kant, duty, and moral worth.** New York : Routledge
- TANEJA, H.C.; TUTEJA, R.K. ,1986. **Characterization of a quantitative-qualitative measure of inaccuracy.** *Kybernetika*, **22**(5), pp.393-402.

- VALBUENA, D.; VERBURG, P.H.; BREGT, A.K.; LIGTENBERG, A., 2010. **An agent-based approach to model land-use change at a regional scale.** *Landscape Ecology* **25**, pp. 185–199.
- VERBIČ, M.; SLABE-ERKER, R., 2009. **An econometric analysis of willingness-to-pay for sustainable development: a case study of the Volčji Potok landscape area.** *Ecological Economics* **68** (5), pp.1316-1328.
- VERBURG, P.; VAN BERKEL, D.; VAN DOORN, A.; VAN EUPEN, M.; VAN DEN HEILIGENBERG, H., 2010. **Trajectories of land use change in Europe: a model-based exploration of rural futures.** *Landscape Ecology* **25**, pp.217-232.
- .